2.5 Dynamisches Verhalten von Temperatursensoren

Einleitung

In Kapitel 2.2 wurde die Kennlinie eines Pt100 besprochen, und wir haben sie im Unterricht auch experimentell aufgenommen. Dabei konnte beobachtet werden dass der Widerstand des Sensors nicht sofort die Temperatur des Kalibrierofens angenommen hat, sondern dass wir eine gewisse Zeit warten mussten (einige Minuten) bis sich der Widerstand nicht mehr verändert hat. Dieses Verhalten kennen Sie aus dem Alltag auch vom Fieberthermometer das man einige Zeit unter der Achsel halten muss bis es die richtige Temperatur anzeigt. Der Sensor reagiert also nur mit einer gewissen Verzögerung auf eine Signaländerung. Dieses Verhalten kann ganz allgemein für alle Sensoren beobachtet werden, und es ist wichtig zu wissen wie schnell ein Sensor reagieren kann, da man "lange genug" warten muss bevor man das Signal ausliest, bzw. bei dynamischen Vorgängen einen "genügend schnellen" Sensor einsetzen muss. Bei Temperatursensoren ist dieses Verhalten leicht zu verstehen, und wir betrachten es darum anhand dieser Sensoren.

In diesem Kapitel lernen Sie:

- woher die Trägheit der Temperatursensoren kommt (Energieerhaltung)
- wie man sie mathematisch mit Ansprechzeit und Grenzfrequenz beschreibt
- wie die mathematische Beschreibung benützt werden kann um das Sensorsignal zu beschleunigen
- wo ähnliche Phänomene sonst auftreten

Demo

Als Demonstration und Einführung zum Thema ~~wird im Unterricht gezeigt~~, wie sich verschiedene Temperatursensoren verhalten, wenn man sie in Eiswasser taucht und daraus wieder an die Luft bringt. Wir sehen, dass Temperatursensoren je nach Konstruktion und Medium z.T. sehr grosse Zeitkonstanten haben.

Im Bild unten ist gezeigt was zwei Pt100 anzeigen wenn man sie in Eiswasser taucht. Pt100 1 (weisse Kurve) ist in einem dicken, langen Schutzrohr (ca. 6mm x 20cm), Pt100 2 (rot) ist in einem viel dünneren und kürzeren Schutzrohr (ca. 1mm x 10 cm). Die Messdaten wurden mit LabView, einem beliebten Programm zur Datenerfassung am PC und einem dazugehörigen Datenerfassungssystem aufgenommen (ähnlich wie der LabJack aus dem Grundlagenlabor beim Batterie-Effizienz-Versuch).

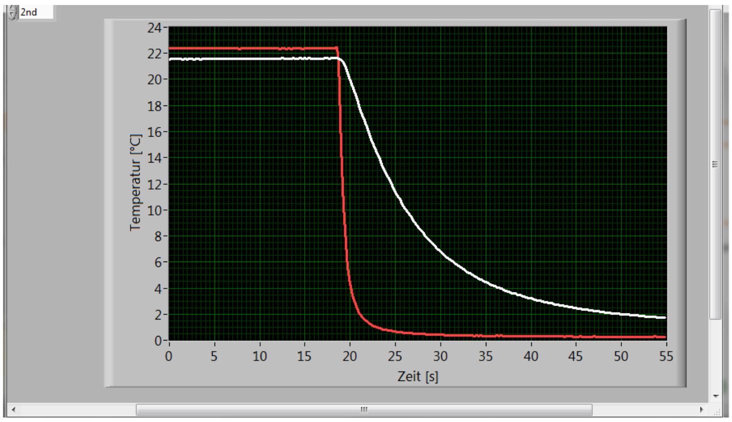


Abbildung 2-16: gemessenes Verhalten von 2 Temperatursensoren beim Eintauchen in Eiswasser

Man sieht schön, dass das Pt100 im dicken, langen Schutzrohr viel langsamer reagiert – und man sieht auch dass es wirklich langsam reagiert – nach 30 Sekunden zeigt es immer noch 2°C statt 0° an.

Überlegen Sie sich: wie würden die beiden Kurven aussehen wenn die beiden Pt100 wieder aus dem Eiswasser hinausgezogen würden und sich an der Luft wieder aufwärmen würden? Skizzieren Sie hier als Funktion der Zeit den erwarteten Temperaturverlauf der beiden Pt100 wenn Sie sie zuerst in Eiswasser eintauchen und dann wieder herausnehmen!

Statische und dynamische Messungen

Die bisher betrachteten Kennlinien sind sogenannte statische Kennlinien, d.h. die Messgrösse ist konstant, und der Sensor hat genügend Zeit um die Messgrösse in einen Messwert zu verwandeln. Alle Einschwingvorgänge sind abgeschlossen. In der Praxis trifft man aber häufig auf dynamische Vorgänge (zeitlich veränderlich), und darum muss überlegt werden, ob der Sensor in der Lage ist, diese zu erfassen. Dazu dient die Angabe einer **Ansprechzeit** T des Sensors, bzw. einer **Grenzfrequenz** f, bis zu der der Sensor einsetzbar ist.

Beispielsweise sind Temperatursensoren meistens langsam, und haben Ansprechzeiten im Sekundenbereich, Mikrophone hingegen müssen Frequenzen bis 20 kHz aufnehmen können, und müssen darum viel kürzere Ansprechzeiten haben, die in der Grössenordnung von 1/20'000 Sekunde liegen müssen, sonst werden die höchsten Frequenzen die unser Ohr hören kann nicht mehr richtig aufgenommen.

Je nach Ansprechzeit des Sensors kann auch die dazugehörige Elektronik schnell oder langsam ausgelegt werden. Temperatursensoren brauchen keine schnellen Messverstärker, Mikrophone schon.

Ansprechzeit

Die Ansprechzeit eines Sensors gibt an, wie schnell er auf eine Änderung der Eingangsgrösse reagiert. Meistens wird dabei die sogenannte **Sprungantwort** betrachtet: Dabei ändert sich (am Beispiel eines Temperatursensors) das Eingangssignal sprunghaft von T_1 auf $T_2 = T_1 + \Delta T$; in der Grafik unten für T_1 = 20°C und T_2 = 25°C gezeigt (diesmal mathematisch berechnet, nicht richtig gemessen). Das Signal des Sensors ist in rot dargestellt, es nähert sich zuerst schnell, dann immer langsamer dem neuen Wert T_1 an, und erreicht ihn aber erst nach unendlich langer Zeit!

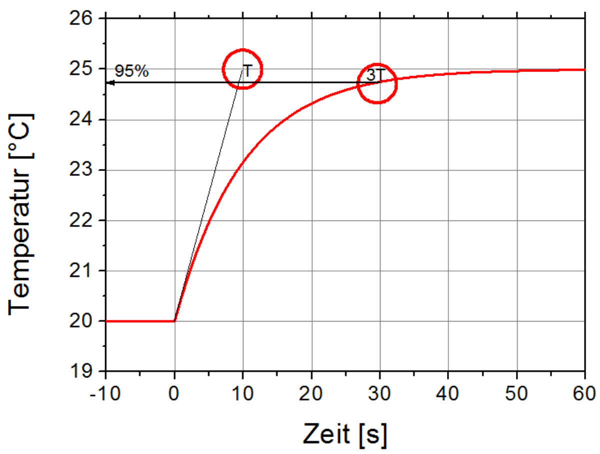


Abbildung 2-17: berechnetes Verhalten eines Temperatursensors bei schlagartiger Erhöhung der Umgebungstemperatur um 5°C

Man kann nicht die Zeit angeben die es dauert bis der Sensor die richtige Temperatur anzeigt (denn das dauert unendlich lange), man gibt daher an wie lange es dauert bis ein bestimmter Anteil des Temperatursprungs vom Sensor angezeigt wird. In der Grafik eingezeichnet ist die Zeit T, die man erhält wenn man eine Tangente zur Zeit t=0 an die Kurve legt, und diese Tangente mit der horizontalen Geraden bei T_2 schneidet. Betrachtet man hingegen die rote Kurve, so sieht man dass erst etwas mehr als 3°C des 5°C-Temperatursprungs angezeigt werden; bei 3T sind etwa 95% des Sprungs erreicht.

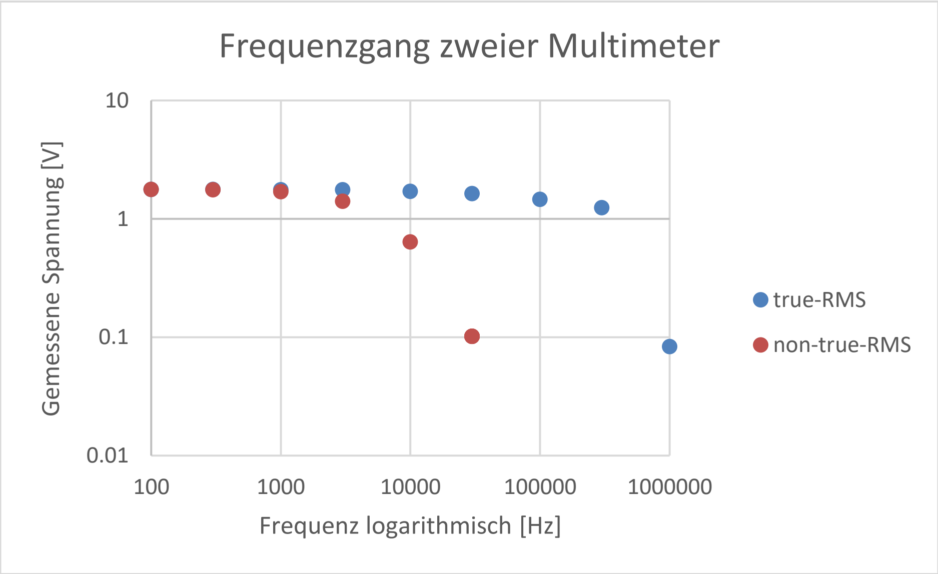
Es gibt leider verschiedenste Definitionen der Ansprechzeit – z.B. die Zeit t_{63}, bis der Sensor $T_1+0.63\Delta T$ anzeigt. Leider ist dies nur eine mögliche Definition der Ansprechzeit; man kann auch die Zeit angeben, bis 90% des Temperatursprungs erreicht sind, oder die Zeit die von 10-90% des Temperatursprungs vergeht. Beachten Sie bei Angaben zu Ansprechzeiten darum immer das Kleingedruckte. Es gibt auch kein allgemeingültiges Symbol das für die Ansprechzeit verwendet wird: t, T, τ sind alle gebräuchlich, oft noch mit einem Zusatz versehen, z.B. T_{95} oder $t_{10\text{-}90}$.

Grenzfrequenz

Wir haben bisher betrachtet wie ein Sensor auf einen stufenartigen Sprung im Eingangssignal reagiert, d.h. wir haben geschaut wie sich der Sensor im Zeitbereich verhält. Als Alternative dazu kann man auch den Frequenzbereich betrachten:

Wenn der Sensor ein sinusförmiges Signal der Frequenz f sieht, so kann er der echten Temperatur gut folgen, wenn die Periode des Signals weit unterhalb der Ansprechzeit ist; je schneller das Signal wird, desto kleiner wird die Amplitude des gemessenen Signals, weil der Sensor nicht schnell genug reagieren kann. Ist die Amplitude des Signals A, so wird die Grenzfrequenz f_G definiert als diejenige Frequenz, bei der der Sensor noch eine Amplitude $A' = \frac{A}{\sqrt{2}}$ sieht.

Ein ähnliches Phänomen haben Sie bereits im EUT-Grundlagenlabor im Versuch zur Spannungsmessung beobachtet, wo die Grenzfrequenz zweier Multimeter bestimmt wurde: wir haben dort untersucht was die Multimeter bei der AC-Spannungsmessung für eine Amplitude anzeigen wenn man ihnen eine Spannung von U = $\sqrt{2}\,V$ zu messen gibt, mit unterschiedlichen Frequenzen. Bei beiden Multimetern wurde beobachtet dass sie nur in einem bestimmten Frequenzbereich richtig gemessen haben – wurde die Frequenz zu hoch, konnten sie die Spannung nicht mehr richtig messen. Dies ist in der Grafik unten zu sehen (von zwei Studenten gestohlen).



Das true-RMS-Multimeter war teurer und darum auch besser, und konnte auch noch höhere Frequenzen richtig messen, aber irgendwann ist auch beim besten Messgerät Schluss.

Repetition Grenzfrequenz Multimeter

~~Anhand des Demomultimeters in der Vorlesung wird nochmals gezeigt wie sich das Multimeter bei verschiedenen Frequenzen verhält. Wie gross ist seine Grenzfrequenz, bzw. wie finden wir sie?~~

Anstelle der Demo im Labor ist hier ein berechneter Frequenzgang eines Sensors gezeigt. Als Funktion der Signalfrequenz ist das Verhältnis von angezeigter Amplitude zu echter Amplitude geplottet – Verhältnis 1 sagt aus, dass der Sensor richtig anzeigt, bei Verhältnis 0.5 zeigt er nur halb so viel an wie er sollte.

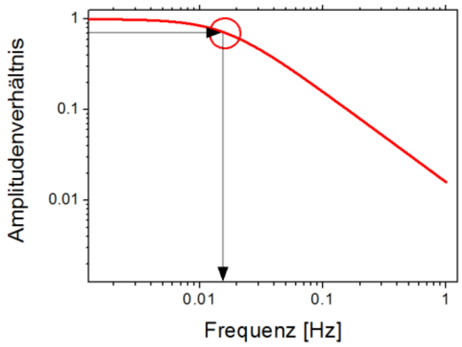


Abbildung 2-18: Frequenzgang eines Sensors, simuliert

In der Grafik ist auf der y-Achse $1/\sqrt{2}$ eingetragen – sucht man den Schnittpunkt mit der Kurve, so kann man auf der x-Achse direkt die Grenzfrequenz ablesen, in diesem Fall ca. 0.015 Hz.

Zusammenhang Grenzfrequenz und Ansprechzeit

Für sogenannte Systeme 1. Ordnung (die einen Signalverlauf zeigen wie wir ihn für die Temperatursensoren beobachtet haben, exponentieller Angleich an den Endwert) gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen der Grenzfrequenz f_G und der Ansprechzeit t_{63}:

$$t_{63} = \frac{1}{2\pi \cdot f_G}$$

Damit lässt sich einfach die Grenzfrequenz aus einer gegebenen Ansprechzeit bestimmen oder umgekehrt!

Warum reagiert der Temperatursensor langsam?

Energieerhaltung!

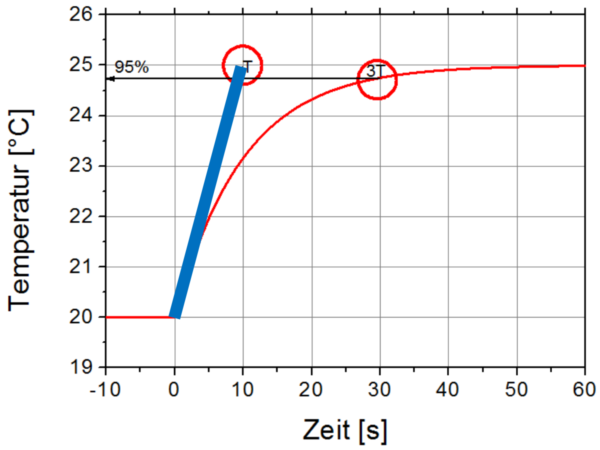
Im Folgenden werden wir versuchen zu verstehen woher die Trägheit des Temperatursensors kommt. Obwohl die echte Temperatur um den Sensor herum sich schlagartig verändert hat, wird der Sensor die neue Temperatur nicht sofort anzeigen, denn er braucht Zeit um sich zu erwärmen – es muss eine Energie $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$ aufgewendet werden um den Sensor mit Masse m, Wärmekapazität c um die Temperatur ΔT zu erwärmen. Diese Energie muss von der Umgebung aufgenommen werden, durch Wärmeübergang wo ein Wärmestrom $\dot{Q} = h \cdot A \cdot \Delta T$ in den Sensor fliesst.

Naiv könnte man annehmen, dass man die Zeit t bis zum Erreichen der Temperatur T_2 ermitteln könnte indem man schreibt

$$Q = \dot{Q} \cdot t \;\rightarrow t = \frac{Q}{\dot{Q}} = \frac{m \cdot c \cdot \Delta T}{h \cdot A \cdot \Delta T} = \frac{m \cdot c}{h \cdot A}$$

Was natürlich falsch ist – denn das ΔT im Zähler der Gleichung ist der Temperatursprung, eine konstante Zahl, die 5°C in Abbildung 2-17; das ΔT im Nenner hingegen ist die Temperaturdifferenz von Umgebung zu Sensor, die während der Erwärmung des Sensors immer kleiner wird. Trotzdem hilft uns diese erste Vorstellung vom Prozess der Erwärmung bereits zu verstehen warum der Sensor nicht beliebig schnell reagieren kann. Sie zeigt uns auch dass er sicher langsamer reagiert als diese erste Berechnung, da die Temperaturdifferenz im Nenner laufend abnimmt und daher das Resultat der Division grösser werden muss.

Betrachten wir nochmals Abbildung 2-15:



Die blau eingezeichnete Tangente entspricht genau der oben betrachteten einfachen Vorstellung dass der Wärmestrom $\dot{Q} = h \cdot A \cdot \Delta T$ konstant ist – dann steigt die Temperatur einfach linear an bis die Umgebungstemperatur erreicht ist. Um nun auch noch die rote, echte Kurve berechnen zu können müssen wir eine Differentialgleichung aufstellen! Dies erfordert ein bisschen Aufwand, aber Sie werden sehen dass es sich lohnt!

Berechnung der Zeitkonstanten mit einer Differential-gleichung

Betrachten wir nochmals unsere Gleichung für den Sensor:

$$Q = \dot{Q} \cdot t$$

Da weder Q noch $\dot{Q}$ konstant sind, gilt sie nur für einen Momentanwert – wir müssten also eine differentielle Form davon schreiben die immer nur für den Moment gilt:

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$$

Mit $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$ und $\dot{Q} = h \cdot A \cdot \Delta T$

Nehmen Sie nun an, dass wir einen Temperatursprung von T_1 nach T_2 betrachten, auf den der Sensor mit der Anzeige der Temperatur T(t) antworten wird (in der Abbildung oben: T_1 = 20°C, T_2 = 25°C, T(t) ist die rote Kurve). Drücken Sie die beiden ΔT (die nicht gleich sind!!) als Funktion von T_1, T_2 und T aus, damit Sie eine Differentialgleichung für den Temperaturverlauf T(t) bekommen.

$\dot{Q} = h \cdot A \cdot \Delta T$ = ...

$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$ = ...

Tipp 1: Für die innere Energie Q(t) müssen Sie eine Referenztemperatur benützen, da die Gleichung $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$ ja nur die Differenz der inneren Energie von zwei Zuständen beschreibt. Schreiben Sie also Q(T) = Q(T_1) + die Differenz der Energie zum Zustand bei T_1 hin; Q(T_1) ist einfach eine unbekannte Konstante die wir nicht kennen müssen.

Tipp 2: Die "richtigen" Temperaturdifferenzen sieht man am besten in einer Grafik, d.h. Abbildung oben benützen!

Falls Sie Q und $\dot{Q}$ als Funktion der gegebenen Temperaturen ausdrücken konnten, so stellen Sie nun auch noch die Differentialgleichung auf. Dies macht man indem man in

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$$

auf der linken Seite das zuvor überlegte Q einsetzt und nach der Zeit ableitet. Tipp: dabei fällt etwas weg weil es 0 ist!

Falls es Ihnen gelungen ist, sollte Ihre Differentialgleichung die Form
$dT/dt = c*(T_2-T)$ haben (c ist eine Konstante bzw besteht aus mehreren Konstanten die in der Problemstellung vorkommen).

c = ...

Was für eine Einheit hat die Konstante c? Diese Frage können Sie auch beantworten wenn Sie die Differentialgleichung nicht herleiten konnten, und auch wenn Sie c nicht berechnet haben!

[c] = ...

Lösung der Diffgleichung?

Es war evtl. ein steiniger Weg bis hierher – und alles was wir bis jetzt davon haben ist eine Differentialgleichung für T(t). Könnten Sie diese Gleichung lösen, d.h. sind Sie in der Lage eine Funktion T(t) anzugeben die die Differentialgleichung erfüllt?

Ihre Lösung: ....

Was ist die Bedeutung der Konstanten c?

Falls Sie die Differentialgleichung nicht lösen konnten so ist das heutzutage fast kein Problem mehr. Man kann die Differentialgleichung in wolframalpha.com eintippen und bekommt sofort eine Lösung dazu. Sie müssten aber noch in der Lage sein zu erkennen ob Wolfram Alpha Sie richtig verstanden hat und die Lösung auf Plausibilität überprüfen können. Wolfram Alpha kann hingegen kein Problem als Text annehmen und die zugehörige Differentialgleichung aufstellen! Dieser Teil ist heutzutage viel schwieriger als die Lösung der Differentialgleichung, und darum wollte ich das mit Ihnen hier üben.

Abschätzung von Zeitkonstanten mit Differential-gleichung ☺

Immer wenn man etwas theoretisch berechnet, sollte man einen "reality check" machen. Ich habe in einem Datenblatt für Platin Glas-Messwiderstände die folgenden Daten gefunden:

Ein zylinderförmiges Pt100 hat die Dimensionen L = 20mm, D = 2.0mm. Das Datenblatt gibt an: Ansprechzeit t bei Temperatursprung von T_1 nach T_2 in Luft mit einer Strömungsgeschwindigkeit von 1 m/s: 12s bis 0.5*ΔT erreicht ist (Beachten Sie dass dies nicht eine übliche Definition der Ansprechzeit ist – jeder Hersteller macht es anders!).

Können wir diese 12 Sekunden aus der Berechnung oben herleiten? Tun Sie dazu folgendes

- Berechnen Sie die Masse m des RTD **nur algebraisch**. Das Volumen können Sie aus den Dimensionen L und D berechnen, für die Dichte setzen Sie einfach ρ ein; später können Sie dann einen Wert für ρ annehmen – aber das ist erst nötig wenn man Zahlen einsetzt!

  m =

- Berechnen Sie die Oberfläche A des RTD **nur algebraisch.** Machen Sie sich das Leben leichter indem Sie **nur die Oberfläche des Zylindermantels** berechnen und die „Kappen“ am Ende vernachlässigen.

  A ≅

- Berechnen Sie die Konstante c nun **nur algebraisch.** Falls Sie sie oben nicht herleiten konnten steht sie da, damit Sie trotzdem weiterrechnen können. Setzen Sie zuerst noch nichts für ρ und c ein, denn auch wenn diese nicht bekannt sind passiert etwas Interessantes beim Einsetzen – gewisse Dinge kürzen sich weg! Wie bestimmt die Geometrie (L, D) also die Zeitkonstante?

  $c = \frac{hA}{mc} =$ ....

  Treffen Sie nun noch Annahmen für ρ und c für Glas, und setzen Sie ein um einen Zahlwert für c zu bekommen. Da Sie oben bemerkt haben dass c die Einheit s^{-1} hat, benennen wir die Konstante auch noch um:

  $1/c = \tau =$ ...

  Der Buchstabe τ (griechisch Tau) wird gerne für Zeitkonstanten verwendet; er erscheint in der Lösung der Differentialgleichung im Exponenten $e^{-t/\tau}$ und beschreibt daher genau die Zeit bis 63% des Temperatursprungs durchgeführt sind (τ_{63}).

- Das Datenblatt hat t = 12s angegeben. Sind Sie zufrieden mit unserem numerischen Resultat?

Zeitkorrektur

Die obigen Überlegungen helfen insbesondere bei der Messung von schnellen Temperaturänderungen. Auch wenn der Sensor zu langsam ist um schnelle Temperaturänderungen zu erfassen, so kann man dank der oben hergeleiteten Formel das Sensorsignal korrigieren und die wahre Temperatur berechnen. (s. Übungsaufgabe)!

Demo Zeitkorrektur

~~In der Stunde wird vorgeführt~~ dass die etwas langwierige Rechnung sich lohnt: Das Signal eines langsamen Temperatursensors wird korrigiert so dass es viel schneller wird!

Wir betrachten nochmals unsere Differentialgleichung für T(t):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(T_2 - T(t)\right)$$

Experimentell messbar ist nur der Temperaturverlauf T(t), aber aus der Herleitung/Problemstellung wissen wir dass die eigentlich zu messende Temperatur T_2 ist. Der Sensor braucht einfach lange bis er diese Temperatur anzeigt. Aber falls man T(t) messen kann, so kann man auch die Ableitung dT/dt numerisch berechnen! Damit wird es möglich, die eigentlich wahre Temperatur T_2 zu bestimmen indem man die Gleichung nach T_2 auflöst:

$$T_2 = T(t) + \tau \cdot \frac{dT}{dt}$$

Kennt man also die Ansprechzeit τ, so kann man dies benützen um den gemessenen Temperaturverlauf numerisch abzuleiten und die echte Temperatur T_2 viel schneller zu erkennen. Normalerweise zeige ich das im Labor, dieses Jahr muss ein Bild vom letztjährigen Versuch genügen:

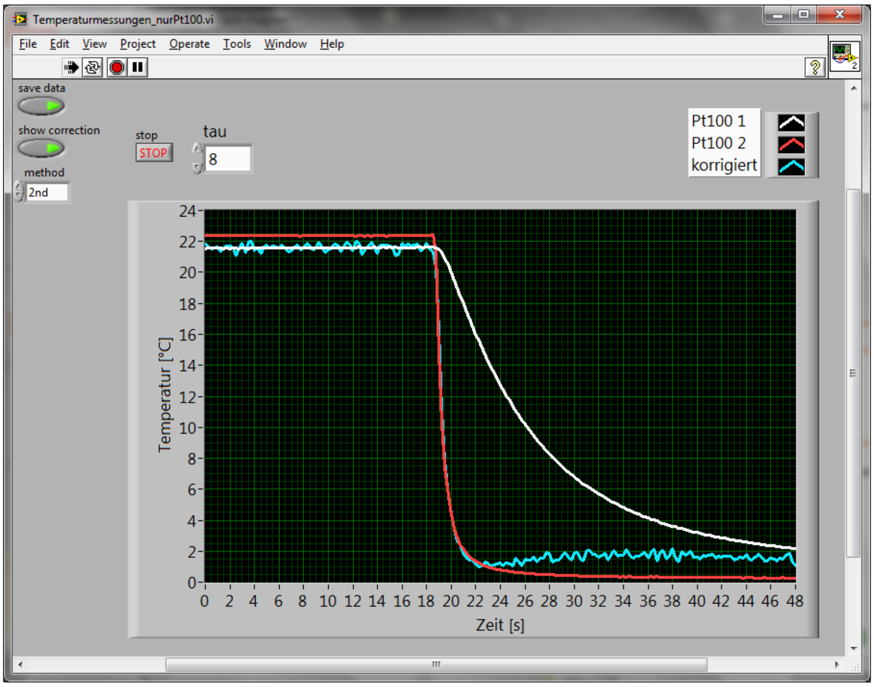


Abbildung 2-19: Langsames Pt100 (weiss) mit Differentialgleichung beschleunigt (hellblau)

Sie sehen in der Grafik dass die eigentlich sehr langsame Reaktion des dicken Pt100 nun durch rein mathematische Behandlung des Signals extrem viel schneller geworden ist – praktisch gleich schnell wie die vom dünnen Pt100. Sie sehen aber auch dass es nicht perfekt funktioniert – wenn Sie eine schnelle Temperaturmessung machen müssen, dann sollten Sie immer einen möglichst schnellen = dünnen Sensor verwenden; die Beschleunigung via mathematischen Methoden ist nicht so gut wie ein schnellerer Sensor.

Verbindung zur Regeltechnik

In der Regeltechnik werden Sie Strategien kennenlernen mit denen man z.B eine Heizung so regelt dass eine möglichst konstante Raumtemperatur erreicht wird. Eine Standardtechnik dazu ist der sogenannte PID-Regler, der einen Proportional-, Integral- und Differentialanteil besitzt (P, I, und D). Der Differentialanteil des PID-Reglers lässt sich dank der Berechnung oben besser verstehen: Der Temperatursensor reagiert immer verspätet, und die wahre Temperatur T_2 kann man schreiben als

$$T_2 = T_{wahr} = T(t) + \tau \cdot \frac{dT}{dt}$$

Da der Regler auf die wahre Temperatur regeln soll, und nicht auf die falsch gemessene Temperatur des Sensors, braucht es den roten Term mit der Ableitung der gemessenen Temperatur!

Zusätzlich zu der langsamen Reaktion des Sensors kann auch noch eine Verzögerung durch Platzierung des Sensors hinzukommen: ist z.B. die Heizung auf einer Seite des Raums, und der Temperatursensor auf der anderen Seite, so tritt eine zusätzliche Verzögerung auf, die aber genau gleich mit einem D-Anteil berücksichtigt werden kann.

Ähnlichkeiten zu anderen Phänomenen

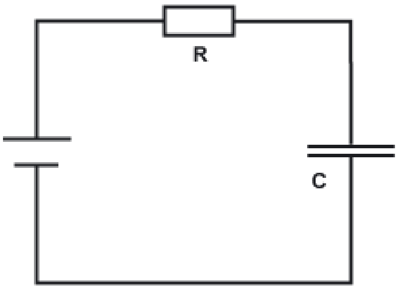
Wir haben jetzt sehr ausführlich betrachtet wie ein Temperatursensor auf Änderungen reagiert – mit Verzögerung, die man mathematisch durch eine Ansprechzeit τ beschreiben kann, bzw. mit einer Differentialgleichung mit der Lösung

$$T(t) = T_2 - \Delta T \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Wenn dieses Verhalten nur bei Temperatursensoren auftreten würde, dann wäre es kaum sinnvoll gewesen derart lange darüber zu reden. Es gibt aber ganz viele Phänomene die sehr ähnlich sind – und die man alle versteht sobald man dieses eine Beispiel verstanden hat!

Ladevorgang eines Kondensators

Ein Kondensator mit Kapazität C soll mit einer konstanten Spannung U_0 über einen Widerstand R aufgeladen werden.



Wie lange dauert es bis der Kondensator geladen ist, bzw. wie ist der Verlauf der Spannung U(t) am Kondensator?

Dazu schreibt man die aus der Elektrotechnik bekannten Gleichungen hin:

Maschenregel:

$$U_0 = U_R + U_C = R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

Strom ist die Ableitung der Ladung:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

Damit ergibt sich:

$$U_0 = R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{C}$$

Oder nach der Ableitung der Ladung aufgelöst:

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{U_0}{R} - \frac{Q(t)}{RC} = \frac{1}{RC}\,(U_0 \cdot C - Q(t))$$

Zum Vergleich der Temperatursensor:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\tau}\,\big(T_2 - T(t)\big)$$

Die Differentialgleichungen sind bis auf andere Namen der Konstanten identisch. Darum sind auch ihre Lösungen identisch – auch hier ist es eine Exponentialfunktion, und offensichtlich ist die Zeitkonstante τ = RC.

Radioaktive Zerfälle

Radioaktive Zerfälle werden durch eine Halbwertszeit beschrieben. Man gibt für eine Anfangszahl N von instabilen Atomen an, wie viele davon nach einer Zeit t noch nicht zerfallen sind. Dabei gilt, dass die Atome pro Sekunde eine feste Wahrscheinlichkeit x haben dass sie zerfallen. Damit kann man eine Differentialgleichung aufstellen:

$$\frac{dN}{dt} = -x \cdot N$$

Wieder fast dieselbe Differentialgleichung, oder wenn man es übertreiben will und zeigen will dass es genau dieselbe Gleichung ist, so schreibt man:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{1/x}(0 - N(t))$$

Man findet als Lösung

$$N(t) = N \cdot 2^{-\frac{t}{t_{50}}} = N \cdot e^{-\ln 2 \cdot \frac{t}{\tau}}$$

...eine Lösung die sehr ähnlich ist wie die von uns betrachteten Beispiele, insbesondere gibt es eine Halbwertszeit t_{50} nach der die Hälfte der Atome zerfallen ist, die man in die "üblichere" Zeitkonstante τ umrechnen könnte, genau so wie wir oben die im Datenblatt angegebene Zeit t_{50} mit der von uns berechneten Zeitkonstante τ_{63} nicht direkt vergleichen konnten.

Atomreaktoren, Atombomben und Epidemien

Bei der Kernspaltung werden jeweils 2 oder 3 freie Neutronen erzeugt die je wieder eine Kernspaltung auslösen können. Bei Epidemien kann jeder Kranke mehrere Menschen anstecken. Beide Prozesse kann man also durch eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dN}{dt} = x \cdot N$$

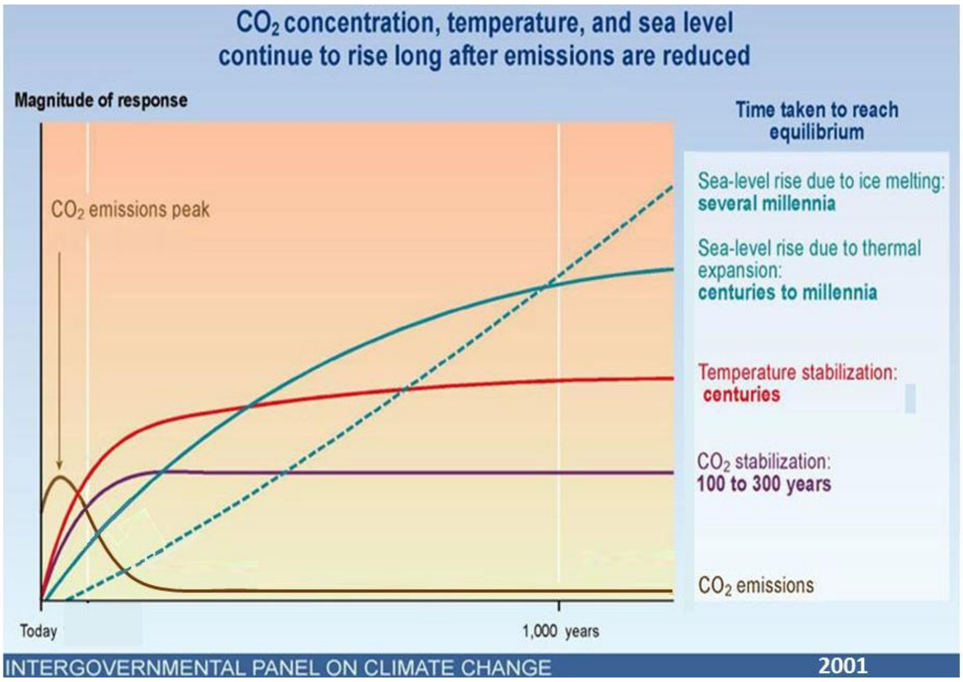
darstellen – beachten Sie dass das Minus auf der rechten Seite für einmal fehlt. Die Lösung dieser Gleichung ist aber immer noch dieselbe wie beim radioaktiven Zerfall, nur fehlt das Minus nun auch im Exponenten, und die Anzahl Kernspaltungen oder die Anzahl Kranker im Land nimmt exponentiell zu!

Badiwetter

Der Frühling ist hier, und bald ist es tagsüber schön warm, so dass man schon an die Badi zu denken beginnt – aber die Flüsse und Seen sind noch kalt. Der Grund ist dass die Wärmekapazität der Gewässer viel grösser ist als die der Atmosphäre und der obersten Bodenschicht; darum sind auch die Zeitkonstanten (umgekehrt proportional zur Wärmekapazität) für ihre Erwärmung viel länger, und es dauert noch lange bis der See schön warm ist – genauso wie es länger gedauert hat bis das Pt100 mit dem grösseren Durchmesser die richtige Temperatur angezeigt hat.

Klimaerwärmung

Wir haben uns überlegt dass eine abrupte Temperaturänderung der Umgebungstemperatur von einem Temperatursensor nur verzögert wiedergegeben werden kann, da der Sensor eine Wärmekapazität besitzt und darum Energie aufgewendet werden muss, um den Sensor aufzuwärmen. Weiter haben wir gesehen dass es nur auf den Durchmesser des Schutzrohrs/Sensors ankommt. Je grösser der Sensor, desto langsamer war er. Beim grösstmöglichen Sensor den wir haben – der Erde selber! – passiert genau dasselbe: Durch die Treibhausgase die die Menschheit emittiert hat, strahlt die Erde weniger Wärme ins Weltall ab als früher. Sie erwärmt sich daher, aber weil sie derart riesig gross ist, ist die beobachtete Erwärmung gegenüber dem zu erwartenden Endzustand verzögert. Selbst wenn wir jetzt sofort die Treibhausgaskonzentration in der Atmosphäre einfrieren könnten, würde sich die Erde noch weiter aufwärmen, da die Zeitkonstanten der Erderwärmung sich in der Grössenordnung von Jahrzehnten bewegen, nicht in Sekunden oder Minuten wie bei den Temperatursensoren! Noch viel langsamer als die Atmosphäre und die Oberflächentemperaturen auf den Kontinenten ist – genau wie beim Badiwetter-Abschnitt oben – die Erwärmung der Weltmeere, und der dadurch hervorgerufene Meeresspiegelanstieg durch thermische Ausdehnung. Die folgende Grafik aus einem etwas älteren IPCC-Report zeigt dies deutlich: hier wird angenommen, dass die CO_2-Emissionen (braun) auf ein tiefes Niveau sinken, so dass die CO_2-Konzentration in der Atmosphäre (violett) stabil bleibt. Trotzdem steigt die Temperatur der Atmosphäre (rot) weiter an. Da das Meer eine viel (viel viel!) grössere Wärmekapazität hat als die Atmosphäre, ist dort die Reaktion auf die stabilisierte CO_2-Konzentration noch viel träger, wie Sie den blaugrünen Kurven ansehen.



2.6 Problematik bei Temperaturmessungen

Wir haben bereits anhand der Genauigkeitsklassen gesehen, dass Temperaturmessungen prinzipiell sehr genau sein können. Das Hauptproblem bei Temperaturmessungen ist selten die ungenügende Genauigkeit der Sensoren, sondern die Tatsache, dass jede Temperaturmessung grundsätzlich nur die Sensortemperatur misst, und eventuell nicht die eigentlich gewünschte Temperatur. Bei Messungen in Flüssigkeiten und in Feststoffen mit grosser Wärmeleitfähigkeit (Metalle) ist dies meist unproblematisch, aber besonders bei Gasen ist Vorsicht geboten: Die geringe Wärmeübertragung von Gasen auf die Temperatursensoren öffnet Messfehlern Tür und Tor.

Als Beispiel betrachten wir die Luft-Temperaturmessung eines von Luft durchströmten Rohrofens: kalte Luft strömt durch ein beheiztes Rohr. Man interessiert sich dafür, wie heiss das Gas im Rohr wird. Das Gas heizt sich auf dem Weg durch das Rohr auf. Wir messen nun die Gastemperatur, indem wir einen Temperatursensor mit Zuleitung in das Rohr einbringen. Betrachten wir nur den Sensor selbst (an der Spitze der Konstruktion), so erkennt man, dass drei Prozesse eine Rolle spielen:

1) Der Sensor tauscht über seine Oberfläche Wärme mit dem Gas aus – dieser Effekt alleine würde dazu führen, dass der Sensor tatsächlich die Gastemperatur misst.

2) Der Sensor hat metallische Zuleitungen, die gute Wärmeleiter darstellen. Dies führt zu Wärmeleitung entlang der Zuleitungen, die dazu führt, dass der Sensor eine zu tiefe Temperatur anzeigt.

3) Der Sensor strahlt gemäss Stefan-Boltzmann Wärmestrahlung ab, ebenso das Rohr des Ofens. Ist der Sensor in relativ kühlem Gas (am Anfang des Rohrs), die Wand des Ofens aber schon sehr heiss, so zeigt der Sensor aufgrund dieses Effekts eine zu hohe Temperatur an.

Effekt 2) lässt sich verringern, indem Zuleitungen mit geringem Querschnitt gewählt werden, Effekt 3) lässt sich verringern oder vermeiden, indem ein „Strahlungsschild“ um den Temperatursensor angebracht wird (ein kleines Röhrchen um den Sensor).

Man merke sich: Die Wahl des Messorts, sowie die Verfälschung des Temperaturfelds durch Wärmeableitung durch den Sensor, oder durch Strahlung, sind bei Temperaturmessungen kritisch.

2.7 Vergleich der Methoden

Wie wähle ich...?

Bei der Wahl eines Temperatursensors spielen viele Kriterien eine Rolle. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über Vorzüge der verschiedenen Methoden

Kriterium	Pt-RTD	NTC/PTC	Thermoelemente
Messgrösse	Temperatur	Temperatur	Differenztemperatur
Preis	Hoch	Tief	Hoch
Temperatur-Einsatzbereich (circa!)	Mittel -200 - 800°C	Klein -100 – 100 °C	Gross -270 – 1800°C (je nach Typ verschieden!)
Genauigkeit	Hoch	Eher tief, in Spezialanwendungen hoch	Mittel
Ansprechzeit	Langsam	Mittel	Schnell
Linearität	Hoch	Tief	Mittel

Sie sehen anhand der Tabelle, dass es nicht einen „besten“ Temperatursensor gibt, sondern dass - je nach Fragestellung – der eine oder andere Typ mit Vorteil eingesetzt wird.